1998年　東大数学　文系第2問 ①

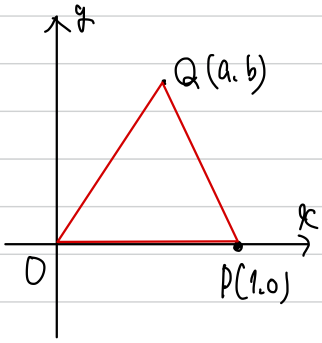
(1)

補　鋭角三角形

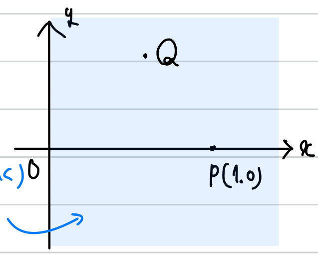
鋭角三角形とは、内角の全てが鋭角の三角形のこと

三角形の内角の和は180°なので、
最大辺が鋭角であれば、全ての内角が鋭角になる

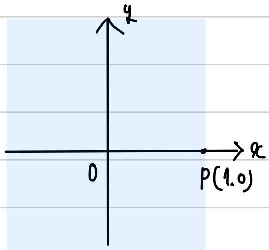
△OPQが鋭角
⇔ ∠POQ < 90° …①
かつ
∠QPO < 90° …②
かつ
∠OQP < 90° …③



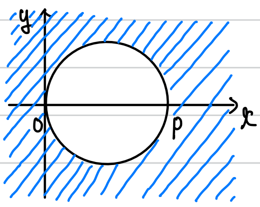
① ∠POQ < 90° となる
点Q(a, b)の条件は、$a>0$ かつ $b\neq0$
この領域なら∠POQが鋭角
(但し、x軸上は、一直線になるので除く)



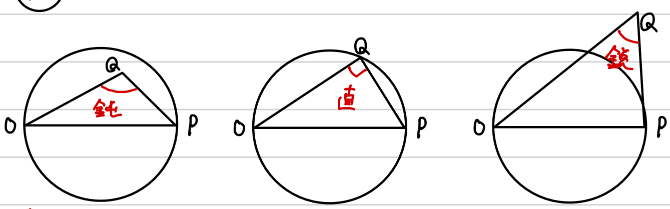
② ∠QPO < 90° となる
点Q(a, b)の条件は、$a<1$ かつ $b\neq0$
この領域なら∠QPOが鋭角
(但し、x軸上は、一直線になるので除く)



③ ∠OQP < 90° となるとき
点QがOPを直径とする円の外部のうち、x軸上でない部分にある
この円の外部なら、∠OQPが鋭角



補

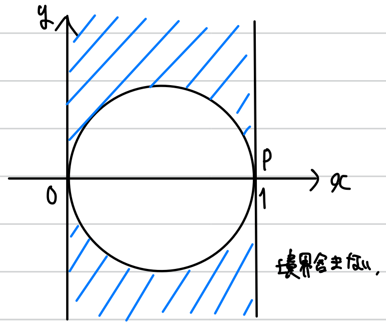


点Qが円の内部　　点Qが円周上　　点Qが円の内部

OPを直径とする円は、中心が$(\frac{1}{2}, 0)$ 半径$\frac{1}{2}$の円なので、
∠OQP < 90° の条件は $(a-\frac{1}{2})^2+b^2>\frac{1}{4}$ かつ $b\neq0$

以上、① $a>0$ かつ $b\neq0$
② $a<1$ かつ $b\neq0$
③ $(a-\frac{1}{2})^2+b^2>\frac{1}{4}$ かつ $b\neq0$ の領域を図示すると

円の式を展開すると $a^2-a+b^2>0$



①かつ②かつ③の式をまとめて、
(a, b)の条件は
$0<a<1$ かつ $a^2-a+b^2>0$

(2) 「$0<a<1$ かつ $a^2-a+b^2>0$」のとき
(※) $(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geq0$ が成立することを示す。

aの登場回数が多いので、bを先に消去しておく。

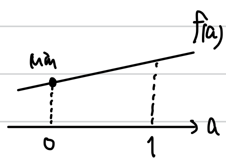
$a^2-a+b^2>0$ より
$b^2>a-a^2$　両辺n^2を掛ける
$n^2b^2>n^2(a-a^2)$
なので、

(※) $(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2$　より小さく
$\geq(m+na)^2-(m+na)+n^2(a-a^2)$　展開して、aで降べきの順
$=(n^2-n+2mn)a+m^2-m$
これはaの1次式

$f(a)=(n^2-n+2mn)a+m^2-m$ とおくと、
$0<a<1$ における $f(a)$ の最小値 ≥0 を示せばよい。

$\boxed{\text{解法1}}$ 傾きで場合分け

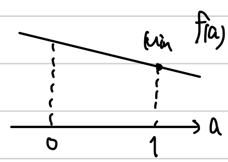
(i) $n^2-n+2mn>0$ のとき、(傾き)>0 なので
$f(a)$ の最小値 $=f(0)$ である。
$f(0)=m^2-m\geq0$ なので、成立



補足

zが整数のとき、$z^2\geq z$
証明　$z<0$ なら (左辺)>0、(右辺)<0
$z=0$ なら (左辺)=(右辺)
$z>0$ なら $z\geq1$ なので $z\times z\geq z\times1$

(ii) $n^2-n+2mn<0$ のとき、(傾き)<0 なので
$f(a)$ の最小値 $=f(1)$ である。
$f(1)=n^2-n+2mn+m^2-m$
$=(m+n)^2-(m+n)\geq0$　$m+n=z$ とおくと、z^2-z となる。



(iii) $n^2-n+2mn=0$ のとき、$f(a)=m^2-m=f(0)\geq0$

よって、証明完了

$\boxed{\text{解法2}}$ 場合分けしない

$f(a)$ が1次関数なので、$f(a)$ の最小値は
傾きがどうであれ $f(0)$ か $f(1)$ のどちらかになる

実際に、解法1を見ると
$f(0)$ か $f(1)$ のみだった。

つまり、$f(0)$ と $f(1)$ の小さい方が $f(a)$ の最小値である

厳密には、「大きくない方」と書いた方がよい。

よって $(f(0)$ と $f(1)$ の小さい方$) \geqq 0$ を示せばよい。

㊗ $\boxed{(a \text{と} b \text{の小さい方}) \geqq 0 \iff a \geqq 0 \text{ かつ } b \geqq 0}$

場合分けが省けて便利！
使える場面が多いので覚えておこう。

から、
$(f(0)$ と $f(1)$ の小さい方$) \geqq 0$
$\iff f(0) \geqq 0$ かつ $f(1) \geqq 0$ とできる。

これのおかげで
場合分けをしなくて済む

$f(0) = m^2 - m \geqq 0$
$f(1) = (m+n)^2 - (m+n) \geqq 0$

解法1を参照

よって証明された。